

# TERMODINÁMICA NUCLEAR

Jorge Alberto López Gallardo

*Universidad de Texas en El Paso, El Paso, Texas 79968, E.U.A.*

(Dated: April 13, 2001)

RESUMEN: Experimentos recientes indican que la materia nuclear podría tener fases líquidas y gaseosas y sufrir cambios entre ellas, estas notas estudian esta interesante posibilidad. Debido a que aún no existe una teoría que pueda describir al núcleo a partir de primeros principios, este estudio se basa en un modelo semi-fenomenológico. Empezando con un gas de Fermi para representar un sistema de nucleones libres, se construye un modelo de materia nuclear agregando una interacción fenomenológica para así estudiar su termodinámica y posibles cambios de fase. Al final se hace una conexión entre las predicciones de este modelo con resultados obtenidos experimentalmente en reacciones nucleares.

## I. INTRODUCCIÓN

El hecho de que los núcleos, independientemente del elemento que se trate, tengan densidad casi constante, indica que la materia nuclear tiene ciertas características muy peculiares. La densidad constante nos dice que las fuerzas que actúan en el núcleo sitúan a los nucleones casi a la misma distancia unos de otros. De esto se deduce que el potencial nuclear debe tener una parte repulsiva a distancias cortas y otra atractiva a distancias grandes, como los líquidos de van der Waals y, en consecuencia, con la posibilidad de fases.

Esta idea no está totalmente fuera de lugar si se toma en cuenta que desde hace tiempo la energía de unión de los núcleos ha sido calculada tomando a estos como gotas de líquido. Asimismo, se sabe que los núcleos excitados pueden emitir nucleones en un proceso que se puede caracterizar como evaporación.

La posible existencia de fases nucleares hizo que se buscaran indicios de cambios de fase en los experimentos de los 80s, en los que núcleos pesados con energías de cientos de  $MeVs$  se rompían en varios fragmentos nucleares. Durante la reacción, la fusión del proyectil con el blanco podría crear un “núcleo complejo” con densidades y temperaturas suficientemente altas para lograr el cambio de líquido a una mezcla de líquido-gas.

Las teorías iniciales consideraban al núcleo complejo como un sistema en equilibrio térmico, y estudiaban el rompimiento estadísticamente. Bajo estas condiciones idealizadas, por ejemplo, se logró entender la distribución de masa de los fragmentos producidos en la reacción. Ahora se sabe que los detalles geométricos del choque son decisivos en determinar el resultado del rompimiento nuclear, y aún no existe una teoría completa que describa este proceso a satisfacción.

Y es que el proceso de rompimiento es sumamente complejo. A partir de dos núcleos fríos altamente correlacionados, se forma un sistema, “núcleo complejo”, a altas densidades y temperaturas, el cual se enfría por emisión de partículas y radiación. En sí, el sistema va de ser puramente cuántico, a ser uno con alta energía de excitación - más clásico - y de nuevo a uno cuántico al enfriarse y volver a la estabilidad isotópica. Para complicar el proceso aún más, todo esto sucede en un sistema finito y no necesariamente en equilibrio térmico.

Estas notas tratan de proveer un marco teórico para el estudio de la termodinámica nuclear. A falta de un modelo cuántico que describa procesos críticos en sistemas pequeños - y ganar con esto el premio Nobel, el plan a seguir es más modesto. Empezando con un simple gas de nucleones libres, se avanzará paso a paso agregando primero una interacción entre los nucleones, y viendo después el correspondiente diagrama de fases del modelo resultante. Con esto como base se estudiarán los cambios de fase posibles, para después hacer una conexión con datos experimentales.

Estas notas son un resumen de algunos de los temas cubiertos en el libro “Lectures Notes on Phase Transitions in Nuclear Matter” escrito por el autor en colaboración con C. O. Dorso y publicado por World Scientific. [1]. El autor agradece el apoyo financiero de la Fundación Nacional de Ciencia de los E.U.A. (PHY-96-00038) así como la hospitalidad de la Universidad de Buenos Aires donde parte de estas notas fueron redactadas.

## II. EL GAS DE NUCLEONES LIBRES

Un núcleo se puede representar como una colección de protones y neutrones en un potencial de pozo. [2] Dado que el número de partículas no sea muy chico, se puede usar mecánica estadística por medio de la cual los nucleones

interactúan tan solo por el principio de exclusión de Pauli.

Para un conjunto de  $N$  nucleones indistinguibles en un volumen  $V$ , a temperatura  $T$ , y en un pozo con niveles de energía  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ , y números de ocupación  $n_1, \dots, n_k, \dots$ , la función de partición gran canónica está dada por [3]

$$\Xi(V, T, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_k\}}^* \prod \lambda e^{(-\beta\epsilon_k)n_k},$$

donde  $\beta = 1/T$ ,  $\mu$  es el potencial químico, y  $\lambda = e^{\beta\mu}$ . [En física nuclear se expresa la temperatura en unidades de energía  $MeV$ , formalmente esto corresponde a  $k_B T$  donde  $T$  sería la temperatura en Kelvin.] Puesto que los nucleones son fermiones,  $n_k = 0, 1$ , y la función de partición se reduce a  $\Xi_{FD} = \prod_k (1 + \lambda e^{-\beta\epsilon_k})$ .

Con esto se pueden extraer algunas variables termodinámicas. [3] El número promedio de partículas, por ejemplo, es

$$N = \sum_k \bar{n}_k = T \left( \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \mu} \right)_{V, T} = \sum_k \frac{\lambda e^{-\beta\epsilon_k}}{1 + \lambda e^{-\beta\epsilon_k}}, \quad (1)$$

*i.e.* el número promedio de ocupación es  $\bar{n}_k = \lambda e^{-\beta\epsilon_k} / (1 + \lambda e^{-\beta\epsilon_k})$ . De la misma manera, la energía promedio total, la presión y la entropía están dadas por:

$$E_F = \sum_k \bar{n}_k \epsilon_k = \sum_k \lambda \epsilon_k e^{-\beta\epsilon_k} / (1 + \lambda e^{-\beta\epsilon_k}), \quad (2)$$

$$pV = T \ln \Xi(V, T, \mu) = T \sum_k \ln(1 + \lambda e^{-\beta\epsilon_k}), \quad (3)$$

$$S = \left[ \frac{\partial pV}{\partial T} \right]_{V, \mu} = \sum_k \left[ \ln(1 + \lambda e^{-\beta\epsilon_k}) - \frac{(\mu - \epsilon_k) e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}}{T(1 + \lambda e^{-\beta\epsilon_k})} \right]. \quad (4)$$

Puesto que en el caso nuclear las energías  $\epsilon_k$ 's están distribuidas casi continuamente (*cf.* problema 2.10), se puede ir de  $\sum_k$  a  $\int_{\epsilon} \omega(\epsilon) d\epsilon$ , donde  $\omega(\epsilon) d\epsilon$  es el número de estados con energía entre  $\epsilon$  y  $\epsilon + d\epsilon$ . Usando  $\omega(\epsilon)$  del problema 2.1 se obtiene

$$N = 2g\pi \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} V \int_0^{\infty} \frac{\lambda \epsilon^{1/2} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{1 + \lambda e^{-\beta\epsilon}}, \quad (5)$$

$$E_F = 2g\pi \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} V \int_0^{\infty} \frac{\lambda \epsilon^{3/2} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{1 + \lambda e^{-\beta\epsilon}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p &= 2g\pi T \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} \ln(1 + \lambda e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \\ &= \frac{4}{3} g\pi \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{(1 + \lambda e^{\beta\epsilon})} = \frac{2}{3V} E_F, \end{aligned} \quad (7)$$

donde la primera integral de la presión fue reducida con integración por partes. Para el caso nuclear  $g = 4$  para tomar en cuenta los grados de libertad del giro intrínscico y la isotopía del nucleón (protones y neutrones). En la mayoría de los casos, la evaluación de (5)-(7) requiere de métodos numéricos. Pero en algunos casos es posible usar aproximaciones a las integrales de Fermi, como se muestra en la siguiente sección.

#### Problema 2.1 Densidad de niveles de energía

(A) Considérese un pozo en tres dimensiones con niveles de energías  $\epsilon = gh^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)/8mV^{2/3}$ , donde  $\{n_i\}$  y  $g$  son los números cuánticos y la degeneración. Usando argumentos geométricos en el espacio de  $n_i$  demuestre que el número de estados disponibles para partículas con energía  $\leq \epsilon$  es  $\Phi(\epsilon) = (\pi/6) [8mV^{2/3}\epsilon/h^2]^{3/2}$ .  
 (B) También demuestre que el número de estados en un cascarón de energía  $\epsilon$  y espesor  $d\epsilon$  es  $\omega(\epsilon)d\epsilon = 2g\pi (2m/h^2)^{3/2} V \epsilon^{1/2} d\epsilon$ .

#### Problema 2.2. $N$ , $E_F$ , y $p$

Obtenga  $N$ ,  $E_F$  y  $p$  (ecuaciones (5)-(7)) a partir de (1)-(3) y usando  $\omega(\epsilon)$  del problema 2.1.

#### Problema 2.3. Entropía

Demuestre que  $S = E_F/T - N\mu/T + pV/T$  empezando con (4) y  $\omega(\epsilon)$  del problema 2.1.

## A Gas de nucleones con alta degeneración

Para las excitaciones que se logran en las reacciones nucleares a energías intermedias, los nucleones se mantienen en niveles de alta ocupación y el sistema nunca llega a tener degeneración debil, *cf.* problema 2.5. Cuando la densidad es alta (cerca de la de saturación,  $n_0$ ), o cuando la temperatura es baja ( $T \ll \epsilon_F$ , ver problema 2.4), la mayoría de los estados están ocupados y  $\epsilon \approx \mu$ . En este caso las ecuaciones (5)-(7) se pueden simplificar por medio de una expansión en términos de  $(\epsilon - \mu)$ .

La ecuación (1) muestra que  $\bar{n}_k = 1/(1 + e^{\beta(\epsilon_k - \mu)})$  es la probabilidad de que el estado  $k$  esté ocupado. Para una distribución continua de energías, esta probabilidad está dada por  $f(\epsilon) = 1/(1 + \lambda e^{\beta\epsilon})$ . La figura 1 muestra la dependencia de energía de  $f(\epsilon)$  en función de  $\epsilon/\mu$ , claramente  $f(\epsilon) \approx 1$  para  $\epsilon \leq \mu$  y  $f(\epsilon) \approx 0$  para  $\epsilon \geq \mu$ . Es decir, todos los estados con energía  $\epsilon \leq \mu$  están ocupados y los demás no. Esto ayuda a obtener expresiones analíticas simples para el caso de temperatura igual a cero.

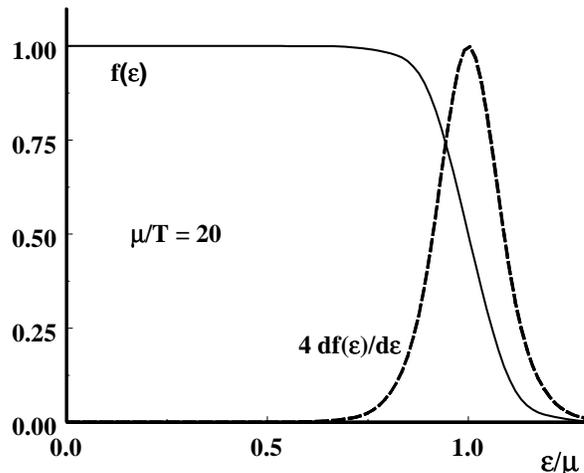


FIG. 1: Comportamiento de  $f(\epsilon)$  y  $df/d\epsilon$  en función de  $\epsilon/\mu$

### Problema 2.4. El caso $T = 0$ y la energía de Fermi

(A) Integre (5) para mostrar que en el límite de temperatura cero  $N$  está dada por  $N = (4g\pi/3)(2m/\hbar^2)^{3/2}V\mu_0^{3/2}$ , donde  $\mu_0$  es el valor del potencial químico para  $T = 0$ , conocido como la *energía de Fermi*,  $\epsilon_F$ . Asimismo muestre que el valor de la energía total del gas de nucleones para  $T = 0$  está dado por  $E_0 = 3N\mu_0/5$ , y la presión por  $p_0 = 2N\mu_0/(5V)$ .

(B) Extraiga la energía de Fermi  $\epsilon_F$  en términos de  $N$ , y evalúela para el caso nuclear donde  $N/V \approx 0.15 \text{ fm}^{-3}$  y  $m \approx 1000 \text{ MeV}/c^2$ . También evalúe  $E_0$  y  $p_0$ .

### Problema 2.5. Degeneración debil

La degeneración debil se logra cuando la longitud de onda de De Broglie de los nucleones,  $\Lambda$ , es a *grosso modo* del tamaño del volumen del nucleón, *i.e.*  $\Lambda^3 \approx V/N$ , donde  $\Lambda = \sqrt{\hbar^2/(2\pi mT)}$ . Para degeneración debil el cociente  $N\Lambda^3/V$  tendría que ser aproximadamente igual a 1. Esboce el comportamiento de  $N\Lambda^3/V$  para el caso nuclear usando  $N/V = 0.15 \text{ fm}^{-3}$ ,  $m = 938 \text{ MeV}/c^2$ , y  $T$  entre 0 to 20  $\text{MeV}$ 's. Establezca un límite de temperatura que garantice la existencia de degeneración debil.

Para temperaturas bajas ( $T \ll \epsilon_F$ ) se pueden obtener expresiones analíticas usando aproximaciones, aquí presentamos el caso de la presión como ejemplo. Evaluando la integral de (7) por partes se obtiene

$$I = \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{(1 + \lambda e^{\beta\epsilon})} = \frac{2\beta}{5} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{5/2} e^{\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon}{(1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)})^2}.$$

esta última integral no puede ser evaluada analíticamente, pero, como se ve en la figura 1, el factor  $df(\epsilon)/d\epsilon = e^{\beta(\epsilon-\mu)}/(1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)})^2$  tiene un fuerte máximo alrededor de  $\epsilon \approx \mu$  para valores bajos de  $T$ , y por ende se puede usar

la expansión  $\epsilon^{5/2} = \mu^{5/2} + (\epsilon - \mu)(\partial\epsilon^{5/2}/\partial\epsilon)_{\epsilon=\mu} + (1/2)(\epsilon - \mu)^2(\partial^2\epsilon^{5/2}/\partial\epsilon^2)_{\epsilon=\mu} + \dots$  para obtener

$$I = \frac{2\beta\mu^{5/2}}{5} \int_0^\infty \frac{e^{\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon}{(1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)})^2} + \beta\mu^{3/2} \int_0^\infty \frac{(\epsilon - \mu)e^{\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon}{(1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)})^2} \\ + \frac{3\beta\mu^{1/2}}{4} \int_0^\infty \frac{(\epsilon - \mu)^2 e^{\beta(\epsilon-\mu)} d\epsilon}{(1 + e^{\beta(\epsilon-\mu)})^2} + \dots$$

La primera integral es simplemente  $2\beta\mu^{5/2}/5$ , y para aproximar el resto de las integrales se extiende el límite inferior de la integración a  $-\infty$ . Todas las integrales con potencias nones de  $(\epsilon - \mu)$  tienen integrandos nones y son cero. Las integrales restantes están dadas por  $I_i = \int_{-\infty}^\infty t^i e^t dt / (1 + e^t)^2 = 2i(i-1)!(1 - 2^{1-i})\zeta(i)$ , para  $i$  entero y nones, donde  $\zeta(i)$  es la función zeta Riemman. Con esto, el límite degenerado de la presión es

$$p = \frac{8g\pi}{15} \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} [\mu^{5/2} + 5\pi^2 T^2 \mu^{1/2} + \dots] . \quad (8)$$

Una derivación similar para  $N$  da

$$N = \frac{8g\pi}{3} \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} V [\mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} T^2 \mu^{-1/2} + \dots] . \quad (9)$$

La ecuación para  $E_F$  se puede obtener a partir de (7), y (8). La entropía sale también de estas ecuaciones y de la ecuación fundamental de Gibbs-Duhem  $S = E_F/T - N\mu/T + pV/T$ .

**Problema 2.6.  $N$  con fuerte degeneración**

Derive la ecuación (9) empezando de (5). Úsela para trazar el comportamiento de la densidad  $n = N/V$  para el rango  $1 \text{ MeV} < T < 10 \text{ MeV}$  y  $20 \text{ MeV} < \mu < 40 \text{ MeV}$ .

Hasta ahora  $\mu$  y  $T$  han sido usadas como variables independientes, pero en ocasiones es conveniente usar la densidad y la temperatura. Esto se logra invirtiendo (9) para obtener el potencial químico en función de  $T$  y  $\epsilon_F$  (ver *eg.* [3]):

$$\mu = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{\epsilon_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{180} \left( \frac{T}{\epsilon_F} \right)^4 + \dots \right] . \quad (10)$$

Esto puede ser usado para obtener

$$E_F = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{T}{\epsilon_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{16} \left( \frac{T}{\epsilon_F} \right)^4 \dots \right] . \quad (11)$$

La energía térmica  $\epsilon_T(n, T) = (E_F(n, T) - E_F(n, 0))/N$  obtenida con la aproximación (11) es comparada en la figura 2 con la evaluación numérica y con un ajuste cuadrático que será presentado en las secciones siguientes.

La capacidad calorífica también se puede calcular con

$$C_V = \left( \frac{\partial E_F}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2\epsilon_F} + \dots . \quad (12)$$

Estas expresiones se pueden evaluar usando  $\epsilon_F = (h^2/2m)(3N/8g\pi V)^{2/3}$ , *cf.* problema 2.4.

**Problema 2.7.  $\mu$  y  $E$  para degeneración fuerte**

Derive las ecuaciones (10)-(12). Nota: véase la sección 10.2 de [3].

**Problema 2.8. Energía libre de Helmholtz**

Demuestre que en el caso de alta degeneración, la energía libre de Helmholtz está dada por  $A = (3N\epsilon_F/5)[1 - (5\pi^2/12)(T/\epsilon_F)^2 + (\pi^4/48)(T/\epsilon_F)^4 \dots]$ .

**Problema 2.9.  $S$  para alta degeneración**

Demuestre que en el caso de alta degeneración, la entropía está dada por  $S = (N\epsilon_F/T)[(\pi^2/2)(T/\epsilon_F)^2 - (\pi^4/20)(T/\epsilon_F)^4 \dots]$ .

## 1 Densidad de niveles de energía

En la aproximación del gas de nucleones libres, la única interacción entre nucleones es la del principio de exclusión. Esto puede ser altamente restrictivo para la dinámica de las partículas a bajas temperaturas, pero para  $T$  altas depende del número de niveles de energía disponibles. Este número se puede calcular usando las ecuaciones derivadas anteriormente para el caso de degeneración fuerte.

Usando la definición estadística de la entropía,  $S(E_F(T)) = \log [\omega(E_F(T))/\omega(E_F(0))]$ , la definición termodinámica,  $S(E_F(T)) = \int_0^T dE_F(T)/T$ , y la ecuación (11), uno obtiene  $S = N\pi^2 T/2\epsilon_F$ . Ahora, definiendo el parámetro del nivel de energías como  $a = N\pi^2/4\epsilon_F$  y dado que  $E_T(T) = N\pi^2 T^2/4\epsilon_F = aT^2$ , la entropía se puede expresar como  $S = 2\sqrt{aE_T}$ . Con esto la densidad de niveles de energía es

$$\omega(E_F(T)) = \omega(E_F(0))e^{2\sqrt{aE_T(T)}}. \quad (13)$$

Hay que notar que en esta derivación la entropía no contiene contribuciones provenientes de posibles cambios del volumen ni del número de partículas, *i.e.* corresponde al caso de volumen y  $N$  fijos.

El cociente  $\omega(E_F(T))/\omega(E_F(0))$  se puede tomar como una medida de la apertura del espacio de fase en función de  $E_T$ . Por ejemplo, como se muestra en el problema 2.10, el número de niveles disponibles para un sistema de 100 nucleones aumenta por un factor de un millón cuando la energía  $E_T$  va de cero a 4 MeV. Las restricciones impuestas por el principio de Pauli no son muy importantes.

### Problema 2.10. Densidad de niveles en el caso nuclear

(A) Derive la ecuación (13).

(B) Demuestre que el parámetro de la densidad de niveles es  $a \sim N/8$  a la densidad  $n_0$ .

(C) Grafique el cociente  $\omega(E_F(T))/\omega(E_F(0))$  para  $E_F = 7 \text{ MeV}$  en el rango  $10 < N < 240$ . [Puede comparar esta estimación con los datos experimentales de la figura 11.29 de [2] donde  $\omega(E_F(0))$  y  $a$  han sido ajustados para reproducir los datos.]

## B Evaluaciones numéricas

Para el caso general, las ecuaciones (5)-(7) deben ser evaluadas numéricamente. Usando  $g = 4$  y  $\eta = \mu/T$ , las expresiones (5) y (7) se pueden escribir

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{2mc^2}{(\hbar c)^2} \right)^{3/2} T^{3/2} \int_0^\infty \frac{t^{1/2} dt}{1 + e^{t-\eta}}$$

$$p = \frac{2}{3\pi^2} \left( \frac{2mc^2}{(\hbar c)^2} \right)^{3/2} T^{5/2} \int_0^\infty \frac{t^{3/2} dt}{1 + e^{t-\eta}}.$$

La integral de Fermi  $\int_0^\infty t^i dt/(1+e^{t-\eta})$  puede ser evaluada usando paquetes de integración numérica, como la subrutina *FERDR C323* de la librería *CERN*. Asimismo, para eliminar la dependencia en el número de partículas, la energía por partícula se puede evaluar usando

$$\varepsilon_F = E_F/N = \frac{3p}{2n} = T \frac{\int_0^\infty t^{3/2} dt/(1 + e^{t-\eta})}{\int_0^\infty t^{1/2} dt/(1 + e^{t-\eta})}.$$

La figura 2 compara la evaluación numérica de la energía térmica del gas libre de nucleones,  $\varepsilon_T(n, T) = (E_F(n, T) - E_F(n, 0))/N$  con la expansión de fuerte degeneración de la sección II A, y con los resultados de un ajuste que se presentará en la siguiente sección.

### Problema 2.11. Evaluación numérica de $n$ , $p$ , $\varepsilon$ y $s$

Use el programa *Fermigas.for* y la subrutina *Ferdr.for* para evaluar numéricamente  $n$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  y la entropía por partícula,  $s = S/N$ , para  $1 \text{ MeV} < T < 10 \text{ MeV}$  y  $20 \text{ MeV} < \mu < 40 \text{ MeV}$ . Compare los resultados de la densidad a los obtenidos en el problema 2.6.

## C Ajuste útil

Para ciertos valores de las variables independientes, es posible obtener ajustes analíticos para ciertas ecuaciones termodinámicas. Por ejemplo, la parte dependiente de  $T$  de la energía por partícula  $\varepsilon_T(n, T) = (E_F(n, T) - E_F(n, 0))/N$

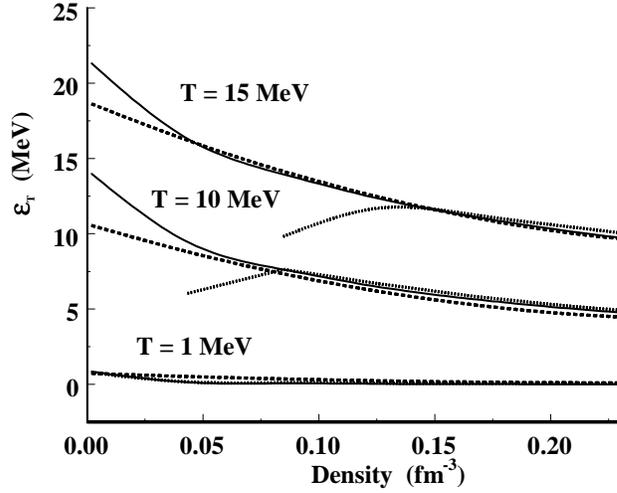


FIG. 2: Integración numérica (continua), ajuste cuadrático (guiones) y la expansión para degeneración fuerte (punteada) de  $\varepsilon_T(n, T) = (E_F(n, T) - E_F(n, 0))/N$  en función de la densidad.

puede ser ajustada por un doble polinomio cuadrático de forma

$$\varepsilon_T(n, T) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon_{Ti}(T) n^i ,$$

Con los coeficientes dados por  $\varepsilon_{Ti}(T) = \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{ij}^T T^j$ .

Un ajuste similar se puede obtener en función de la entropía:  $\varepsilon_S(n, S) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon_{Si}(S) n^i$  con los coeficientes, ahora dependientes de la entropía, dados por  $\varepsilon_{Si}(S) = \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{ij}^S S^j$ . La tabla I da los valores  $\{\varepsilon_{ij}^T\}$  y  $\{\varepsilon_{ij}^S\}$  que mejor reproduce  $\varepsilon_T$  y  $\varepsilon_S$ , en el rango de interés nuclear:  $0 < T < 20 \text{ MeV}$ ,  $0 < S < 3$ , y  $0 < n < 0.2 \text{ fm}^{-3}$ . [Nótese que en nuestro caso  $S$  no tiene unidades, *i.e.* está medida en unidades de la constante de Boltzmann.] La figura 2 compara el ajuste (dependiente de la temperatura) de  $\varepsilon_T(n, T)$  con la ecuación de degeneración fuerte y con la evaluación numérica presentadas en las secciones II A y II B.

TABLE I: Coeficientes  $\varepsilon_{ij}^T$  y  $\varepsilon_{ij}^S$ .

Coeficientes isotérmicos			Coeficientes Isentrópicos		
$\varepsilon_{01}^T = 0.693$	$\varepsilon_{11}^T = -5.420$	$\varepsilon_{21}^T = 11.447$	$\varepsilon_{01}^S = -0.0984$	$\varepsilon_{11}^S = -2.481$	$\varepsilon_{21}^S = -1.697$
$\varepsilon_{02}^T = 0.037$	$\varepsilon_{12}^T = 0.082$	$\varepsilon_{22}^T = -0.312$	$\varepsilon_{02}^S = 0.845$	$\varepsilon_{12}^S = 20.607$	$\varepsilon_{22}^S = 17.151$

### 1 Curva calórica

Los ajustes obtenidos para la energía térmica,  $\varepsilon_T$ , pueden ayudar a calcular la función conocida como la curva *calórica*, que es la relación entre la temperatura del gas de nucleones libre y su energía térmica. Puesto que la energía térmica,  $\varepsilon_T(n, T)$ , depende explícitamente en  $T$ , la curva calórica se puede obtener a partir de la inversión de esta ecuación:

$$T(n, \varepsilon_T) = -T_B(n) + \frac{\sqrt{T_B^2(n) + 4 T_A(n) \varepsilon_T}}{2 T_A(n)} ,$$

donde  $T_A(n) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon_{i2}^T n^i$  y  $T_B(n) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon_{i1}^T n^i$ . La figura 3 muestra la relación  $T - \varepsilon_T$  para tres valores de la densidad.

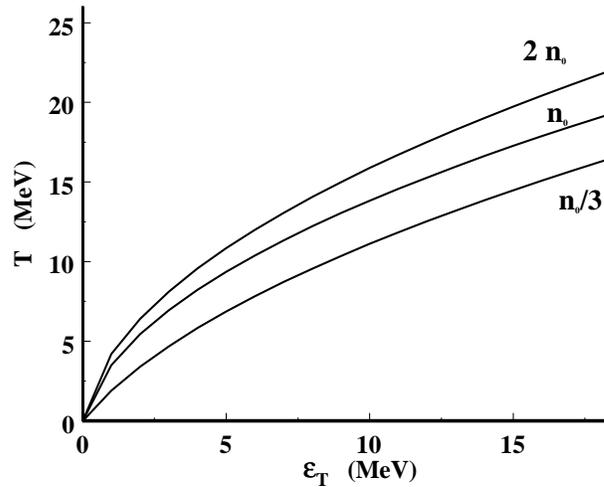


FIG. 3: Curva calórica del gas de nucleones libres

Para gases reales, la curva calórica (a presión constante) es continua con una primera derivada discontinua en los cambios de fase. [Véase por ejemplo la curva calórica experimental nuclear en la figura 13.] Puesto que el modelo usado no contiene interacciones nucleón-nucleón, esta curva calórica no tiene esta discontinuidad.

#### D Evaporación de nucleones

A pesar de que la falta de interacciones entre partículas impide la existencia de fases en el gas de nucleones libres, un sistema de este tipo, pero de tamaño finito puede “evaporar” partículas. En este contexto, la evaporación se refiere a la separación de partículas del resto del gas. Existen dos métodos equivalentes para evaluar esta radiación de partículas, la emisión termiónica y la evaporación de Weisskopf. Aquí tan solo presentamos la primera, para una comparación de los dos métodos véase [1, 4].

##### 1 Emisión termiónica

Considérese un gas de nucleones libre en un pozo de altura  $W$ , con  $W > \epsilon_F$ . La distribución de momento de las partículas está dada por  $f(\epsilon)$  (cf. sección II A) expresada en términos del momento  $\vec{p}$ :  $f(\vec{p}) = 1/(1 + e^{(\vec{p}^2/2m - \mu)/T})$ . Si los nucleones están en una región de espacio separada del vacío por una superficie, las partículas con momento alto podrán escapar hacia el vacío.

Poniendo la superficie perpendicular a la dirección  $z$ , las partículas con  $p_z^2/2m > W$  escaparán en una unidad de tiempo dado que estén a una distancia  $dz = v_z$  de la superficie, donde  $v_z$  es la velocidad perpendicular a la superficie. El número de partículas que escapan por unidad de tiempo es

$$R = \int_{p_z = \sqrt{2mW}}^{\infty} \int_{p_{xy}} d^3p n_p v_z f(\vec{p}),$$

donde la componente transversal a  $z$  del momento  $p_{xy}$  es  $v_z = p_z/m$ , y  $n_p$  es el número de estados cuánticos por unidad de volumen, *i.e.*  $n_p = (gV/h^3)/V = g/h^3$ . Usando  $d^3p = dp_z dp_{xy} d\theta p_{xy}$

$$\begin{aligned} R &= \int_{p_z = \sqrt{2mW}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{g}{mh^3} \frac{d\theta p_{xy} dp_{xy} p_z dp_z}{(1 + e^{((\vec{p}_z^2 + p_{xy}^2)/2m - \mu)/T})}, \\ &= \frac{2g\pi mT}{h^3} \int_{\epsilon_z = W}^{\infty} d\epsilon_z \ln [1 + e^{(\mu - \epsilon_z)/T}], \end{aligned}$$

donde se usó un cambio de variables  $\epsilon_z = \vec{p}_z^2/2m$ . Ahora, para temperaturas bajas ( $T \ll W$ ), y puesto que  $W > \mu$  el término exponencial será pequeño y

$$R \approx \frac{2g\pi mT}{h^3} \int_W^\infty d\epsilon_z e^{(\mu-\epsilon_z)/T} = \frac{2g\pi mT^2}{h^3} e^{(\mu-W)/T} . \quad (14)$$

Dado que  $\mu$  es una función de la temperatura y la densidad,  $R$  depende también de estas variables.

**Problema 2.12. Emisión termiónica**

Use la ecuación (14) para calcular el número de nucleones que son irradiados de un núcleo con  $T = 3 \text{ MeV}$ , y  $N = 100$  en un intervalo de tiempo de  $10^{-21} \text{ s}$ . Tome  $\mu - W$  igual a la energía de separación  $8 \text{ MeV}$ , y calcule la superficie nuclear suponiendo que el núcleo es una esfera de radio  $r = r_0 N^{1/3}$  con  $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ .

El gas simple de nucleones libres usado aquí no distingue entre neutrones y protones. En modelos más realistas (véase *e.g.* [5]), los protones sentirían una repulsión de Coulomb, mientras que los neutrones no. Hay que mencionar que el producto  $R \times \text{Superficie} \times \text{Tiempo}$  es un  $dN/dt$ , y por lo tanto debe ser integrado al calcular la emisión en períodos largos donde tanto  $N$  y  $T$  pueden variar.

### III. LA ECUACIÓN DE ESTADO NUCLEAR

En el gas de nucleones libres, las partículas interactúan entre ellas tan solo por el principio de exclusión. En núcleos reales, sin embargo la fuerza nuclear fuerte y la de Coulomb juegan un papel muy importante en la estabilidad del núcleo. Para construir un modelo más real del núcleo se deben de agregar las interacciones entre nucleones, pero al no haber aún un método teóricamente correcto para hacer esto, se agregarán los efectos de estas interacciones de una manera fenomenológica.

Una manera de hacer esto es simplemente agregando la energía de interacción al gas de nucleones libres, de tal manera que la energía por nucleón resultante a  $T = 0$  y densidad de saturación  $n_0$ , corresponda a la observada experimentalmente,  $\epsilon(n_0) = -8 \text{ MeV}$ . Asimismo, puesto que los núcleos son estables a esta densidad, la presión debe ser cero, y, de acuerdo a experimentos de oscilación nuclear [6], la compresibilidad debe ser del orden de  $100 \text{ MeV} < K(n_0) < 300 \text{ MeV}$ .

Entre las varias parametrizaciones propuestas para representar la energía de interacción [7–11], la de Kapusta es la más sencilla de manipular, y se usará junto con el ajuste doble-cuadrático de la sección II C para agregar la dependencia en la temperatura del gas libre.

La ecuación de estado (*EDE*) de un medio relaciona la presión con dos variables independientes,  $p(n, T)$ , la cual se puede obtener de  $p(n, T) = n^2(\partial\epsilon(n, T)/\partial n)_S$ . Agregando la energía de interacción al gas libre, la energía por nucleón  $\epsilon_{int}(n)$  (medida respecto al valor de  $T = 0$ ) es entonces

$$\epsilon(n, T) = \epsilon_{int}(n) + [\epsilon_F(n, T) - \epsilon_F(n, 0)] = \epsilon_0(n) + \epsilon_T(n, T) .$$

Nótese que en este simple modelo la energía de interacción se toma como independiente de la temperatura y estaría dada por  $\epsilon_{int}(n) = \epsilon_0(n)$ . La parte térmica de la energía por nucleón,  $\epsilon_T$ , está en términos de la energía del gas de nucleones libre,  $\epsilon_F = E_F/N$ , (*cf.* Ec. (6)) y su valor de temperatura cero,  $\epsilon_F(n, 0) = 3\mu_0(n)/5$  (*cf.* problema 2.4).

La parametrización de [10],  $\epsilon_0(n) = \sum_{i=2}^5 a_i (n/n_0)^{i/3}$ , corresponde a la energía de  $T = 0$  con los parámetros  $\{a_i\}$  ajustados para dar  $p = 0$ ,  $\epsilon_0 = -8 \text{ MeV}$ ,  $K = 210 \text{ MeV}$ , todos a la densidad de saturación, así como la energía correcta del gas de Fermi para  $T = 0$  y densidad baja. La compresibilidad se obtiene de  $K = n(\partial p/\partial n)_T$ . La *EDE* correspondiente es entonces

$$p(n, T) = \frac{n_0}{3} \sum_{i=2}^5 i a_i \left(\frac{n}{n_0}\right)^{i/3+1} + \epsilon_T(n, T) , \quad (15)$$

con  $a_2 = 21.1$ ,  $a_3 = -38.3$ ,  $a_4 = -26.7$ , y  $a_5 = 35.9$  todos en unidades de  $\text{MeV}$ . Para simplificar esta ecuación aún más, se puede usar  $\epsilon_T(n, T) = \sum_{i=0}^2 \epsilon_{Ti}(T) n^i$  con los coeficientes dependientes de la temperatura  $\epsilon_{Ti}$  de la tabla I. La figura 4 muestra las curvas de presión isotérmicas obtenidas con la ecuación (15) en función de la densidad.

Como se ve en la figura 4, la presión tiene el comportamiento característico de un medio clásico. Normalmente una reducción del volumen ocupado por el gas, *i.e.* un incremento en la densidad provoca un aumento de la presión debido a que  $\partial p/\partial n > 0$ . La figura 4, sin embargo, muestra la existencia de una región donde  $\partial p/\partial n < 0$ . En esta

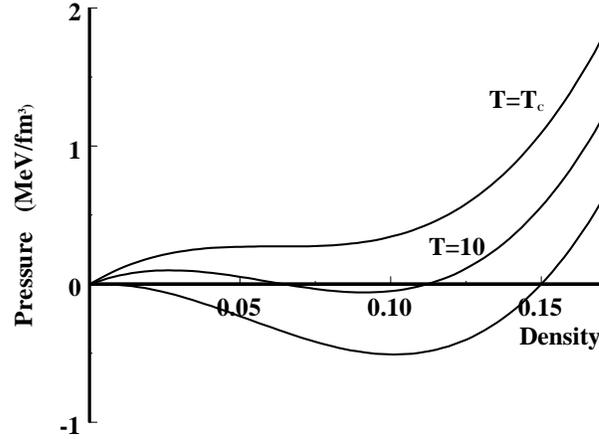


FIG. 4: Presión versus densidad para temperaturas  $T_c = 14.542 \text{ MeV}$ .

región la compresibilidad es negativa y el sistema responde a un aumento de la densidad con un mayor aumento de la densidad misma. Esta región no es estable, y todas las fluctuaciones de densidad que normalmente ocurren en esta región romperán el sistema en pedazos de baja densidad (partículas gaseosas) y de alta densidad (partículas en estado líquido). Estas regiones son conocidas como las regiones *espinodales* isotérmicas (si  $(\partial p/\partial n)_T < 0$ ) y adiabáticas (si  $(\partial p/\partial n)_S < 0$ ).

Pero esta no es toda la historia, aún antes de que el núcleo entre a las espinodales, hay una región donde, a pesar de que  $\partial p/\partial n > 0$ , no es necesario añadir energía extra para remover o agregar nucleones a un núcleo. Dentro de esta región (conocida como la región de *coexistencia*, la materia nuclear uniforme abandona las curvas de presión isotérmicas y se rompe en fases con una presión dada por la temperatura y densidades promedio del sistema.

**Problema 3.1. Los coeficientes  $a_2$**

En el caso de degeneración fuerte, la parte de  $T = 0$  de la energía del gas de Fermi va como  $E_F(n, T = 0) \sim n^{2/3}$ . Calcule  $E_F(n, 0)$  y compare el coeficiente de  $n^{2/3}$  con el parámetro  $a_2$  de la EDE.

### A Región de coexistencia

Dentro de la región de coexistencia, las fases líquidas y gaseosas están en equilibrio con las condiciones  $T_{liquid} = T_{gas}$ ,  $p_{liquid} = p_{gas}$  y  $\mu_{liquid} = \mu_{gas}$ . La región de coexistencia donde esto sucede se determina por medio del procedimiento llamado *construcción de Maxwell*.

La figura 5 muestra las curvas isotérmicas de presión para  $T = 13 \text{ MeV}$  en contra del volumen. La región inestable va del punto  $D$  al  $F$ . Para determinar la región de coexistencia hay que ver la energía necesaria para agregar o restar un nucleón de cualquier fase, *i.e.* la energía libre de Gibbs,  $g = \mu = \epsilon - Ts + pV$ .

Cambios infinitesimales de la energía libre de Gibbs están dados por  $dg = -sdT + Vdp$ . En una isotérmica donde  $dT = 0$ , el cambio en la energía de Gibbs es el área bajo la curva  $V(p)dp$ . Para determinar el límite de la región de coexistencia, esta área debe ser igual a cero.

Tomando la figura 5 como referencia, el área de interés es la que está abajo de la curva. Debido a los cambios de signo de  $dp$  en la inflexión,  $(g_2 - g_1)$  no es una función monótona de los límites. Con esto, la ecuación correspondiente

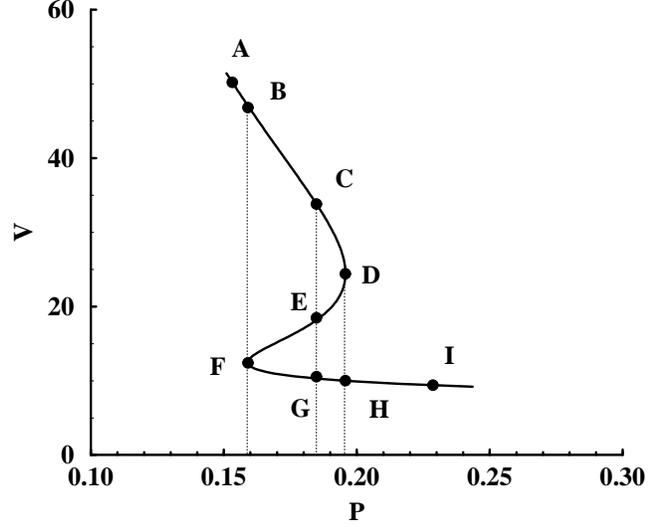


FIG. 5: Volumen versus presión para  $T = 13 \text{ MeV}$ . La región inestable está entre los puntos  $D$  y  $F$ .

en términos de  $T$  y el volumen es:

$$\begin{aligned}
 g_2 - g_1 &= \int_{p_1}^{p_2} V(p) dp = \\
 &= \left[ \left( \frac{5a_2}{3n_0^{2/3}} + \frac{8a_5}{3n_0^{5/3}V} \right) \frac{1}{V^{2/3}} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{3} (\varepsilon_{01}^T + \varepsilon_{02}^T T) T \log(V) + \frac{7a_4}{3n_0^{4/3}} \frac{1}{V^{4/3}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{6a_3/n_0 + 4\varepsilon_{11}^T T + 4\varepsilon_{12}^T T^2}{3V} + \frac{\varepsilon_{21}^T T + \varepsilon_{22}^T T^2}{V^2} \right]_1
 \end{aligned}$$

donde los  $\varepsilon_{ij}^T$  están dados en la tabla I.

La figura 6 muestra el comportamiento de  $g$  en función de  $P$  a una temperatura de  $13 \text{ MeV}$ , *i.e.* abajo de  $T_c$ . Para que un sistema esté en equilibrio,  $g$  debe estar en un mínimo. Por lo que los valores permitidos de  $g$  son los de la curva  $ACGI$ . Los puntos  $C$  y  $G$  coinciden, y pueden ser determinados por la condición  $0 = \int_{p_c}^{p_g} V(p) dp$ , la cual implica que

$$\int_{p_c}^{p_d} V(p) dp - \int_{p_e}^{p_d} V(p) dp = \int_{p_f}^{p_e} V(p) dp - \int_{p_f}^{p_g} V(p) dp .$$

Esto implica que las áreas determinadas por la curva de  $p$  constante y la isotérmica bajo consideración, a la izquierda y a la derecha de la intersección en la región inestable, deben ser iguales. De esta manera, la condición de “áreas iguales” determina la región de coexistencia.

Está claro que los puntos finales de la construcción de Maxwell también se pueden calcular de las condiciones  $(p_c = p_g)_{T,p}$  y  $(\mu_c = \mu_g)_{T,p}$  puesto que, en equilibrio, las presiones y los potenciales químicos deben ser iguales. La porción de las isotérmicas que quedan entre el límite de la curva de coexistencia y la región espinodal son conocidas como la región de vapor *supercalentada* y la del líquido *superenfriado*, (*cf.* figura 7).

El programa `Coexistence.nb` escrito en `Mathematica` es una manera sencilla e ilustrativa de como determinar la región de coexistencia.

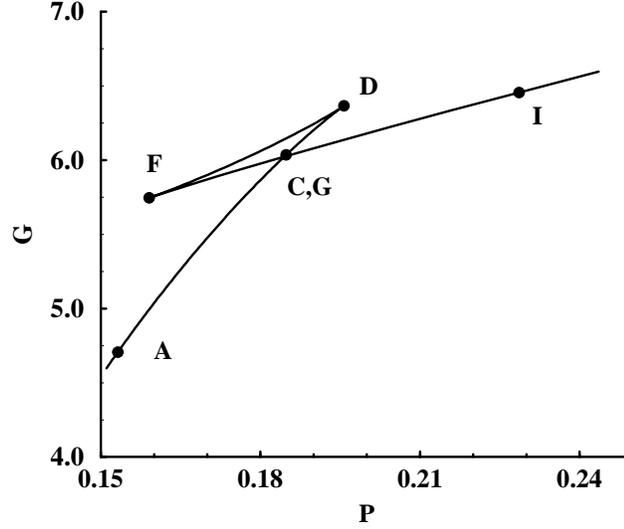


FIG. 6:  $G$  en función de  $p$  para  $T = 13 \text{ MeV}$ , *i.e.* casi en  $T_c$

### B Regiones espinodales

La línea punteada de la figura 7 muestra los límites de la región inestable, conocida como la espinodal isotérmica. Esta curva fue calculada resolviendo  $(\partial p(n, T)/\partial n)_T = 0$  para  $n$  para varias temperaturas. La rama derecha de la curva muestra los puntos donde un aumento de la densidad del líquido no provoca ningún cambio en la presión. La rama izquierda muestra los puntos similares para la fase gaseosa. Las dos ramas se unen en el punto crítico  $(n_c, T_c)$ . Para nuestra parametrización, ecuación (15), esto ocurre en  $n_c = 0.061 \text{ fm}^{-3}$  y  $T_c = 14.542 \text{ MeV}$ .

Para procesos adiabáticos, *i.e.* aquellos que conservan la entropía total del sistema, el medio nuclear se puede describir usando la ecuación similar a (15), pero dependiente de la entropía,  $p(n, S) = n_0/3 \sum_{i=2}^5 ia_i(n/n_0)^{i/3+1} + \varepsilon_S(n, S)$ , con los  $\varepsilon_S(n, S)$  dados en la sección II C. De nuevo, la presión isentrópica  $p(n, S)$  tiene una zona de compresibilidad negativa (ahora la compresibilidad isentrópica) conocida como la región *mecánicamente inestable*. La frontera de esta zona, llamada la *espinodal adiabática* se muestra en la figura 7 con línea de guiones. Para nuestra *EDE*, el punto culmen se encuentra en  $n = 0.034 \text{ fm}^{-3}$  y corresponde a una entropía de  $S = 2.145$ .

#### Problema 3.2. Frontera de la región inestable

Use la *EDE* (15) para determinar el punto crítico y varios puntos de la espinodal isotérmica. Nota: la condición  $(\partial p(n, T)/\partial n)_T = 0$  nos da el requerimiento:

$$0 = 5a_2n_0 (n/n_0)^{2/3} + 9a_3n + 14a_4n (n/n_0)^{1/3} + 20a_5n (n/n_0)^{2/3} + 3\varepsilon_{T0}n_0 + 6\varepsilon_{T1}n_0n + 9\varepsilon_{T2}n_0n^2.$$

#### Problema 3.3 La región mecánicamente inestable

Repita el problema 3.2 para determinar el punto final y varios puntos de la espinodal adiabática. Nota: la condición  $(\partial p(n, S)/\partial n)_S = 0$  da el mismo requerimiento que el del problema 3.2 con el conjunto  $\{\varepsilon_S\}$  reemplazando  $\{\varepsilon_T\}$ .

#### Problema 3.4. La entropía en $T_c$

Usando la *EDE* dependiente de  $T$  (15) y su contraparte dependiente de  $S$ , determine la entropía del punto crítico. Nota: resuelva  $p(n_c, T_c) = p(n_c, S_c)$  para  $S_c$ . También determine la temperatura del punto final de la espinodal.

#### Problema 3.5. Densidad de saturación

Usando la ecuación (15), verifique que la materia nuclear es estable a la densidad de saturación  $n_0$ , *i.e.* verifique que  $p = 0$  con  $T = 0$  y densidad  $n_0$ .

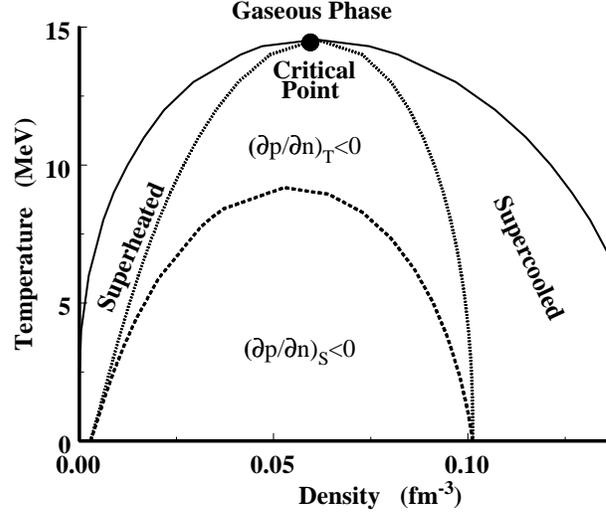


FIG. 7: Diagrama de fases de la materia nuclear.

**Problema 3.6 Compresibilidad nuclear**

Derive una ecuación para la compresibilidad isotérmica  $K$  empezando con la ecuación (15), y verifique que  $K = 210 \text{ MeV}$  con  $T = 0$  y densidad  $n_0$ .

**Problema 3.7 Velocidad del sonido**

El cuadrado de la velocidad isotérmica del sonido está dado por  $c_s^2 = (\partial p / \partial n)_T / m$ . Demuestre que para nuestra  $EDE$ ,  $c_s^2$  está dada por

$$c_s^2 = \frac{2}{9mn_0} \left[ 9a_3n + 14a_4n \left( \frac{n}{n_0} \right)^{1/3} + 5a_2n_0 \left( \frac{n}{n_0} \right)^{2/3} + 20a_5n \left( \frac{n}{n_0} \right)^{2/3} + 3n_0\varepsilon_{T0} + 6n_0n\varepsilon_{T1} + 9n_0n^2\varepsilon_{T2} \right] \quad (16)$$

con los  $\varepsilon_{Ti}$  de la tabla I. Determine las unidades de  $c_s^2$  si  $m$  está dada en  $\text{MeV}/c^2$ , y grafique  $c_s^2$  para identificar la región donde  $c_s^2 < 0$ , *i.e.* la espinalidad isotérmica (*cf.* sección III B).

**IV. CAMBIOS DE FASE**

La materia nuclear puede ir de una fase uniforme a una de fases mezcladas si entra en la región de coexistencia (ver figura 7). En particular para sistemas finitos, esto sucede durante la expansión del sistema, como se supone que pasa en choques de iones pesados. En esta sección se ven algunas características de la termodinámica de la materia nuclear en expansión.

**A Expansion isentrópica**

La existencia de fases ha sido discutida, pero no los procesos que llevan a la formación de estas. Esta sección presenta una breve descripción de la termodinámica de expansión de la materia nuclear.

Como se ve en las figuras 4 and 7, la espinalidad isentrópica y la isotérmicas están dentro de la región donde las burbujas y gotas pueden coexistir. Un sistema nuclear que al expandirse traspasa estas líneas, responderá con *compresibilidad negativa* agrandando fluctuaciones de densidad pequeñas y rompiéndolo en una mezcla de gotas y nucleones libres.

Un choque ideal entre dos iones pesados podría, en principio, formar un sistema comprimido y caliente que pudiera expandirse después de la colisión inicial. [En términos de densidad, temperatura y entropía, el medio iría de  $(n, T, S) = (n_0, 0, 0)$  hasta algún punto con  $n > n_0$ ,  $T > 0$ , y  $S > 0$ .] Puesto que el sistema está aislado del resto del universo, este se expandiría adiabáticamente en el vacío, conservando la entropía total generada durante el impacto. Al caer la densidad de un sistema comprimido, su temperatura disminuirá, y mientras el sistema continúe en una sola fase no habrá ningún otro cambio de entropía. Su evolución de temperatura podrá ser graficada en el plano  $n$ - $T$  sobre un camino de entropía constante.

Puesto que hay una correspondencia de uno-a-uno entre cualquier par de puntos  $(n, T)$  y  $(n, S)$ , uno puede resolver para  $T$  de  $p(n, T) = p(n, S)$ , lo cual, en nuestra parametrización, es equivalente a  $\varepsilon_T(n, T) = \varepsilon_S(n, S)$ . La expresión resultante es

$$T(n, S) = -T_B(n) + \frac{\sqrt{T_B^2(n) + 4 T_A(n) \varepsilon_S(n, S)}}{2 T_A(n)}, \quad (17)$$

donde,  $T_A(n) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon_{i2}^T n^i$  y  $T_B(n) = \sum_{i=0}^2 \varepsilon_{i1}^T n^i$ . La figura 8 muestra las trayectorias que un sistema expandiéndose con  $S = 1, 2$  y  $3$  seguirían en el plano  $n$ - $T$ .

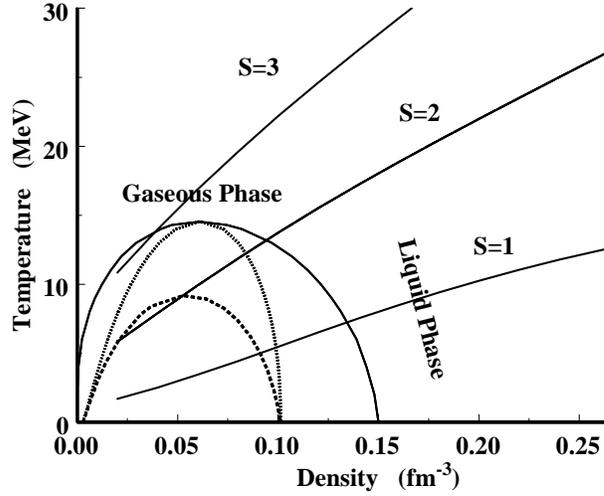


FIG. 8: Expansión isentrópica de la materia nuclear

Una vez que el sistema nuclear expansivo entra más allá de la región de coexistencia, este se descompone en fases líquidas y gaseosas. La configuración final dependerá de la velocidad de la expansión así como también en la curva isentrópica que haya seguido durante la expansión.

Existen varias posibilidades en la expansión isentrópica de un sistema nuclear :

- **Cambios de fase isotérmicos**

**Gas a líquido.** Sistemas nucleares inicialmente en la fase gaseosa, y expandiéndose de un punto de partida con  $T$  o  $S$  altas (*i.e.*, encima del punto crítico), como en la curva  $S = 3$  en la figura 8, puede irse a una fase mixta por la condensación de partículas gaseosas en gotitas en la región supercalentada.

**Líquido a gas.** Los núcleos que se ensanchan lentamente desde una densidad inicial en el régimen líquido y  $T$  (o  $S$ ) subcríticas, como en la curva  $S = 1$  en la figura 8, tendrá suficiente tiempo en la región superenfriada como para permitir que el líquido forme una mezcla de partículas gaseosas y gotitas líquidas.

- **Decomposición espinodal**

**Decomposición espinodal isotérmica.** Si la expansión de un sistema líquido es lo suficientemente rápida, un núcleo que comenzará de una densidad líquida y temperatura o entropía subcrítica (como en la curva  $S = 2$  en la figura 8) no tendría suficiente tiempo para nuclearse en la región superenfriada. En este caso, el núcleo será capaz de alcanzar la espinodal isotérmica y se romperá en una fase mixta por el crecimiento isotérmico de fluctuaciones de densidad.

**Descomposición espinodal adiabática.** Si la expansión de un núcleo es lo suficientemente rápida, y comienza de una densidad alta y temperatura o entropía bajas (como en la curva  $S = 1$  figura 8), el sistema no se romperá en la región superenfriada. Esta vez, el núcleo entrará en la espinodal isentrópica y se romperá en una fase mixta por descomposición espinodal.

**Problema 4.1.**  $T(n, S)$

Derive la ecuación (17) a partir de  $p(n, T) = p(n, S)$  y usando las definiciones presentadas en las secciones III y III B.

## B Transición de fase isotérmica

Un posible camino hacia la transformación de un vapor saturado a una mezcla de líquido y gas es por medio del crecimiento de gotitas sumergidas en el vapor. En la misma manera, burbujas de vapor puede aparecer en una fase líquida. Tanto el cambio de líquido a gas y el de gas a líquido pueden tener lugar en la región de metaestabilidad, la cual está delimitada por la curva de coexistencia y la espinodal isotérmica (*cf.* figura 7). El análisis de tales procesos está descrito por la teoría de nucleación.

La nucleación es ese proceso en el que una fluctuación de densidad crece por medio de la agregación de nucleones o se encoge debido a la evaporación de los mismos. Enseguida, las condiciones necesarias para tener una mezcla de fases fija y estable se analizan para diferentes casos.

### 1 Distribución de gotas

La teoría de fluctuaciones [12] explica que para sistemas en equilibrio termodinámico, la probabilidad,  $w(x)$ , que una magnitud  $x$  alcance un valor entre  $x$  y  $dx$  es  $w(x) \propto e^{S(x)}$ , donde  $S(x)$  es la entropía del sistema.

Usando la magnitud  $R_{\min}$  (que caracteriza el trabajo mínimo necesario para variar las condiciones del sistema en una manera reversible) se obtiene que  $w(x) \propto e^{-R_{\min}/T_0}$ , con  $R_{\min} = \Delta E - T_0 \Delta p_0 \Delta V$ , con  $\Delta E$ ,  $\Delta S$  y  $\Delta V$  representando las variaciones de energía, entropía y volumen de la pequeña región donde sucede una fluctuación.  $T_0$  y  $p_0$  son los valores medios de la temperatura y presión. En particular, cuándo se trata con un sistema con temperatura y presión constantes,  $R_{\min} = \Delta G$ .

En el caso analizado, el interés está en fluctuaciones de densidad que producen gotas. La probabilidad de tener una gota en el vapor está dada por

$$P_r(A) \propto e^{-\Delta G/T} . \quad (18)$$

Estas expresiones pueden ser usadas para explorar los diferentes términos que afectan la estabilidad de gotas líquidas sumergidas en el vapor.

Considerémos primero el caso en que  $\Delta G$  es manejado por los términos de volumen, superficie y curvatura. En este caso la ecuación (18) se puede reordenar de la siguiente manera:

$$P_r(A) = Y_0 A^{-\tau} e^{-[(\mu_l - \mu_g)A + 4\pi r_0 \sigma(T)A^{2/3}]/T} ,$$

con  $Y_0$  siendo una constante de normalización.

**Formas Funcionales.** Dependiendo de la posición del sistema en el diagrama de fases,  $P_r(A)$  adoptará formas funcionales diferentes. Los casos del interés especial son:

- **Región supersaturada.** En la región supersaturada (segmento  $CB$  en la figura 5),  $\mu_l < \mu_g$  y la producción está dada por

$$P_r(A) = Y_0 A^{-\tau} e^{(\mu_g - \mu_l)A/T} e^{-(4\pi r_0^2 \sigma(T)A^{2/3}/T)} \quad (19)$$

la cual muestra un comportamiento en forma de “U”.

- **Región de coexistencia.** En la región de coexistencia, la condición de equilibrio es  $(\mu_l - \mu_g) = 0$ , entonces

$$P_r(A) = Y_0 A^{-\tau} e^{-4\pi r_0^2 \sigma(T)A^{2/3}/T} . \quad (20)$$

En este caso se encuentra un decaimiento en forma de ley de potencia más un corte exponencial que domina para masas grandes.

- **Punto crítico.** Si el sistema está en el punto crítico, una vez más  $(\mu_l - \mu_g) = 0$  pero también  $\sigma(T_c) = 0$ , lo cual nos dice que las fases gaseosas y líquidas son indistinguibles en ese punto. La distribución de masa es una ley de potencia pura y, como tal, libre de escalas:

$$P_r(A) = Y_0 A^{-\tau}, \quad (21)$$

**Tensión superficial.** Una variable importante en este estudio es la tensión superficial  $\sigma(T)$  [13]. Una fórmula de interpolación que reproduce correctamente el límite de baja temperatura así como el comportamiento alrededor del punto crítico es

$$\sigma(T) = \sigma_0 \frac{(T_c^2 - T^2)^{5/4}}{(T_c^2 + T^2)^{5/4}},$$

donde  $\sigma_0 = 18MeV/4\pi r_0^2$ . [14]

**Producción de masa.** Considerando la producción de gotas en la curva de coexistencia, entonces  $\mu_l = \mu_g$ , eliminando todas las distribuciones en forma de “U”.

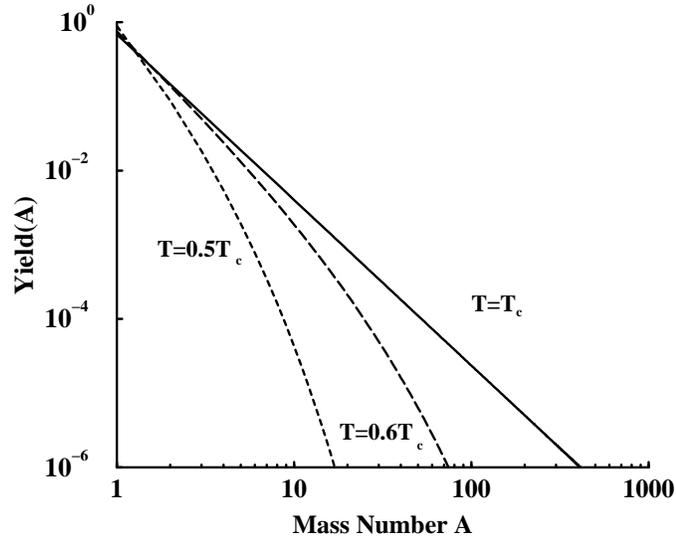


FIG. 9: Masas resultantes en función del tamaño de los fragmentos para  $T = 0.5T_c$ ,  $0.8T_c$ , y  $T_c$ .

La figura 9 muestra la distribución de masa resultante en función de la masa de los fragmentos para  $T = 0.5T_c$ ,  $0.8T_c$  y  $T = T_c$ . [En este caso se fijó  $A = 200$  y se usó la temperatura crítica de nuestra ecuación de estado,  $T_c = 14.542 MeV$ .] Inmediatamente se ve que, en la medida en que nos acercamos al punto crítico, la producción va de ser un decaimiento exponencial hacia una ley de potencia neta.

**Problema 4.2.**  $\sigma(T)$

Esboce la dependencia que la tensión superficial,  $\sigma(T)$ , tiene sobre la temperatura. ¿Cuál es el valor de  $\sigma(T)$  para  $T > T_c$ ?

### C Como conclusión

La sencilla ecuación del estado del capítulo 2 es lo suficientemente completa como para analizar la transición de una fase uniforme a una fase mixta bajo diferentes condiciones. Por ejemplo, la parametrización de las trayectorias  $T - n$  de sistemas en expansión isentrópica, muestran la posibilidad de la transición de *gas a líquido* cuando la expansión comienza en  $T$  o  $S$  altas, o de una transición de *líquido a gas* para expansiones lentas que empiezan de densidades altas y  $T$  o  $S$  pequeñas. Otras posibilidades de decaimiento son las *descomposiciones isotérmicas* o *adiabáticas* para núcleos rápidamente expansivos que comienzan de densidad altas y temperaturas o entropías subcríticas.

El modelo así desarrollado permitió también una aplicación directa de la teoría de nucleación para determinar la composición de fases. Las condiciones para la coexistencia de fases se determinaron, así como también la línea de metaestabilidad nuclear. Se encontró que los rompimientos que suceden en la región *supersaturada* producen una distribución de masa en forma de “U”. Los que ocurren en la región de la coexistencia producen un decaimiento en forma de ley de potencia más una caída exponencial. El caso especial de cambios de fase en el punto crítico, producen una distribución de masa en forma de una ley de potencia, libre de escalas.

## V. REACCIONES DE IONES PESADOS

Existen datos que corroboran de manera indirecta la existencia de fases en la materia nuclear. El hecho de que el núcleo tiene comportamiento hidrodinámico se ha conocido desde hace algunos años [15, 16], pero la evidencia de posibles cambios de fase es más reciente [17, 18]. Aquí presentamos un breve resumen de datos experimentales y su interpretación teórica.

### A Un escenario probable

Un choque de iones pesados puede formar un sistema denso y caliente que podría expandirse y entrar en la zona de coexistencia o espinodal rompiéndose en gotas (fragmentos) y vapor (partículas ligeras)

- **Tamaños.** Tomando el radio nuclear como  $r = r_0 N^{1/3}$ , un ión de tamaño mediano tendría un diámetro de  $5 \sim 7 \text{ fm}$ . Como la densidad de saturación es constante  $\approx 0.15 \text{ fm}^{-3}$  para todos los isótopos, la distancia entre núcleos es  $\approx 2.3 \text{ fm}$ . [De alcance similar a la interacción nuclear.] Tomando el tamaño del radio de un nucleón como  $\approx 0.5 \text{ fm}$  [19], la densidad a la cual las esferas se tocarían sería  $\approx 2 \text{ fm}^{-3}$ . Esta sería la máxima compresión que se podría lograr sin involucrar a los quarks. [Ver problema 5.1.]
- **Energía.** Dado que la energía de unión es  $\approx 8 \text{ MeV}/N$ , la energía necesaria para partir núcleos de  $N \approx 100$ , sería del orden de algunos miles de  $\text{MeV}$ . Las energías de haz, entonces, tendrían que ser de varias decenas de  $\text{MeVs}$  por nucleón.
- **Tiempos.** El tiempo necesario para la termalización de los núcleos está dado por la energía cinética del proyectil y la velocidad con que se transfiere la energía en la materia nuclear. El tiempo de transferencia se puede calcular con la velocidad del sonido, digamos  $c_s \approx 0.2 c$  (*cf.* problema 3.7 para densidades altas). Si la distancia a viajar es el doble del radio nuclear, el tiempo resultante es  $t \approx 2r_0 N^{1/3}/c_s \approx 55 \text{ fm}/c$  or  $18 \times 10^{-23} \text{ s}$  para un núcleo de  $N = 100$ . La duración del choque se puede estimar como el tiempo necesario para que el proyectil atravesara el blanco. Una partícula de  $20 \text{ MeV}$  se movería en una velocidad de  $v \approx 0.2 c$  haciendo que el tiempo del choque sea igual al tiempo previo de la propagación de la energía. [Ver problema 5.2.]
- **Advertencias**
  - Emisión Temprana.** La detección de un posible cambio de fase tiene por fuerza que estar basado en un análisis de las partículas finales producidas en la reacción. Pero puesto que las partículas pueden ser emitidas en cualquier momento de la reacción, no todas ellas provienen del cambio de fase. Por ejemplo, en un contacto inicial en un choque de iones pesados, varios nucleones individuales podrían ser arrojados directamente por el proyectil. Estos nucleones no participarían en la distribución de energía y no serían emitidos como un producto del cambio de fase.
  - Parámetro de impacto.** Los choques no centrales reducirán el número de nucleones que participan en el cambio de fase. Los nucleones que no participan, *i.e.* los “espectadores”, absorberán una cantidad de energía no determinada que se usará en evaporar partículas borrando así posibles identificadores del cambio de fase.
  - Producción de partículas.** A las energías de impacto mencionadas antes, es posible producir piones y otras partículas. Esto resulta en una reducción de la energía que se usa para calentar el sistema e inhibe el rompimiento del núcleo.
  - Emisión tardía.** Después del rompimiento del sistema denso y caliente, los fragmentos están lo suficientemente excitados como para sacudirse algunos nucleones de encima bajando así su temperatura. Esto también contamina las posibles señales identificadoras del cambio de fase.
  - Efectos cuánticos.** Después de haber reducido la temperatura por emisión de partículas, los núcleos sobrevivientes se deslizarán hacia la estabilidad isotópica por medio de decaimientos  $\alpha$  y  $\beta$ . Estos procesos ciertamente no están relacionados con las condiciones que existieron durante el cambio de fase y modificarán la distribución

de masa e isótopos final.

**Temperatura nuclear.** Puesto que la temperatura de los núcleos que chocan se incrementa primero y disminuye después durante el choque, las mediciones de esta temperatura varían dependiendo del método que se use. Por ejemplo, la pendiente del espectro de energía cinética de las partículas se puede usar para determinar la temperatura existente durante la evaporación de partículas; esto, presumiblemente, correspondería a una etapa temprana de la reacción. [Ver sección VB.] La proporción de isótopos, a su vez, también puede reflejar la temperatura que el sistema tiene cuando se logra el equilibrio químico. Pero debido a que para esto se necesita más tiempo, estas temperaturas corresponderían a una etapa más tardía de la reacción. Ciertamente las temperaturas obtenidas por estos métodos varían, ver [20].

Teniendo esto en cuenta, se puede uno aventurar a aplicar la teoría desarrollada para tratar de ver señales de un cambio de fase líquido-gas. Hay varios datos experimentales que se pueden tomar como evidencias de un posible cambio de fase en reacciones de iones pesados. En particular, las distribuciones de energía cinética y masa de las partículas emitidas, así como la curva calórica podrían proveer evidencia de termalización, nucleación y una transición de fase de primer orden.

**Problema 5.1. Escala de longitud**

Usando simple argumentos geométricos, calcule la distancia inter-nucleónica que existe a la densidad de saturación, así como la densidad a la cual los núcleos esféricos se tocarían entre si, suponiendo la existencia de un radio nucleónico de  $\approx 0.5 \text{ fm}$ .

**Problema 5.2. Escala de tiempo**

Calcule el tiempo de transferencia de energía en una reacción  $U+U$  suponiendo que  $T \approx T_c$  cuando la densidad  $\approx 2n_o/3$ , (*cf.* problema 3.7).

## B Espectro de energía cinética

Un requerimiento *a priori* para la aplicación de la termodinámica es la existencia de equilibrio térmico en el núcleo durante la reacción. Si un núcleo se termaliza a cierta temperatura, como se explicó en la sección IID, puede evaporar partículas; esta emisión de partículas puede ser detectada experimentalmente y ser usada para confirmar el equilibrio térmico.

Para temperaturas suficientemente altas, la distribución de energía cinética de las partículas emitidas (*cf.* sección IID) va de ser una distribución de Fermi-Dirac a una de Maxwell. Esto ha sido observado experimentalmente, por ejemplo, en fragmentación inducida en xenón con protones [21]. La figura 10 muestra el espectro de energía de *Be* (emitido a  $48.5^\circ$  del haz de protones) junto con el ajuste de Maxwell. Curvas similares han sido obtenidas para otros isótopos.

Es necesario mencionar varios detalles experimentales. Los datos mostrados incluyen choques a diferentes parámetros de impacto, algo de importancia menor para el caso de choques con protones. Los isótopos de *Be* de baja energía no son capturados debido a los límites de detección experimental. Finalmente, debido a que las partículas son emitidas de una fuente que está en movimiento, la distribución de energía cinética podría estar afectada por este hecho. Esto se compensa usando un ajuste de “emisión en movimiento” en lugar de un ajuste de Maxwell normal. Para mayor información ver [21] y [22].

## C Distribución de masa

Como se explicó en la sección IV B 1, la distribución de masa de las gotas está relacionada con el proceso de nucleación. Dependiendo de que si la transición de fase tiene lugar en la región supersaturada, o en la región de coexistencia, o en el punto crítico, la distribución de masa tendrá una dependencia característica en el tamaño de las gotas (*cf.* ecuaciones (19)-(21)). Para usar esto como una señal de un cambio de fase, se necesita hacer un cuidadoso análisis de la distribución experimental de masa.

La figura 11 muestra tres de las primeras observaciones de distribuciones de masa. La curva superior es para fragmentación de xenón inducida por protones a energías de 80 a 350 *GeV* [17], la curva intermedia y la inferior son para Neón en Oro a 250 y 2100 *MeV/N* [23]. Como se puede ver, estas distribuciones son bien representadas por leyes de potencia, y fueron, inicialmente, tomadas como indicaciones de la existencia de fenómeno crítico.

En principio, una ley de potencia pura debe de existir solo en rompimientos en el punto crítico, y con un único exponente  $\tau$  independiente del tamaño de sistema, etc. (*cf.* ecuación (21)). El hecho de que la figura 11 nos muestra de más de un solo  $\tau$ , que varía de 1.5 a 3.1, reafirma el hecho de que no todas las reacciones ocurrieron en el punto

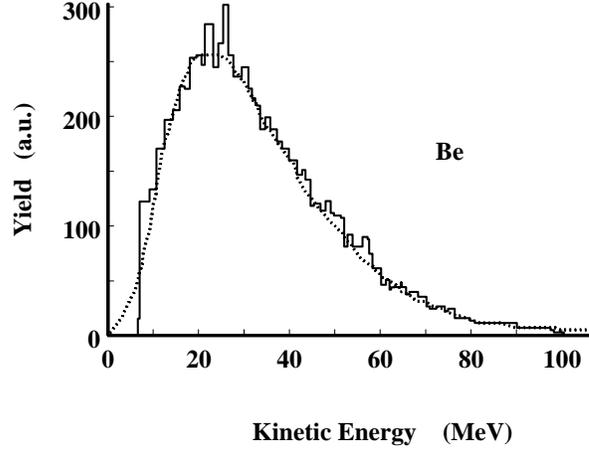


FIG. 10: Distribución de energía cinética de  $Be$  emitidos en la reacción  $p + Xe$  con energías de protón entre 10.1 y 11.4  $GeV$ . La línea punteada es el ajuste de “emisión en movimiento”.

crítico. Aún a pesar de esto, estos datos pueden ser usados para obtener una indicación de la existencia de un fenómeno crítico.

Usando un ajuste de ley de potencia, se pueden obtener los exponentes,  $\tau$ , como parámetros de ajuste. Este “exponente aparente” hace las veces de los factores exponenciales de las ecuaciones (19) y (20), y toma diferentes valores en las regiones de supersaturación, coexistencia, y punto crítico. Puesto que los factores exponenciales son menores que 1 fuera del punto crítico, la distribución estará modulada por un factor de reducción dependiente de la masa. Esto hace que la distribución sea más decayente y el  $\tau$  aparente mayor. Alrededor del punto crítico, donde la función exponencial  $\approx 1$ , la distribución debe ser menor decayente, y el exponente aparente debe tener su valor mínimo. Este procedimiento, nos debe de dar el exponente crítico real así como una estimación de la temperatura crítica obtenida directamente de los datos experimentales.

La figura 12 muestra una compilación de exponentes aparentes obtenidos de varios experimentos. Los círculos negros son los de las reacciones  $p + Ag$  (0.21 – 4.9  $GeV$ ),  $p + U$  (4.9, 5.5  $GeV$ ),  $p + Xe$ ,  $p + Kr$  (80, 350  $GeV$ ), y  $C + Ag$ ,  $C + Au$  (0.18, 0.36  $GeV$ ) [18]. Los círculos vacíos son los obtenidos con cinemática inversa en  $Au + C$ ,  $Au + Al$ , y  $Au + Cu$  a 600  $MeV/N$  [24]. La dependencia en la temperatura de los exponentes aparentes claramente muestra un mínimo en  $\tau \approx 2$  a  $T \approx 12 MeV$ , nuevamente de acuerdo con la expectativas teóricas.

La variación con la temperatura de  $\tau$  se puede razonar en términos de la física. A bajas energías, el núcleo compuesto está excitado con energía apenas suficiente para evaporar unas cuantas partículas ligeras, produciendo una distribución rápidamente decayente y algún  $\tau$  grande. Cuando la energía aumenta, el residuo se rompe poblando la sección de cargas intermedias, esto reduce el exponente correspondiente. Finalmente, a energías más altas, los fragmentos de masas intermedias se enfrían por evaporación produciendo más partículas ligeras y reduciendo el número de fragmentos de tamaño mediano, haciendo que la distribución sea rápidamente decayente y con un  $\tau$  grande una vez más. Esta variación del espectro de masas ha sido bautizada como el “ascenso y descenso” de la multi-fragmentación [24].

Aunque la distribución de carga de estos experimentos se ajusta a una ley de potencia, y los exponentes  $\tau$  parecen tener la variación correcta en la temperatura, no está garantizado que el proceso sea una transición de fase de líquido a gas. Por un lado, los experimentos siguen produciendo valores distintos del exponente crítico (eg.  $\tau \approx 2.2$  [25–27] y otros valores [28]), y por el otro, se ha argumentado que un sistema finito en expansión debe presentar leyes de decaimiento distintas [29, 30]. Por más que querramos relacionar estas distribuciones de carga y sus  $\tau$  con fenómenos críticos, la cuestión de que si las distribuciones de carga en forma de leyes de potencia identifican a procesos de nucleación, sigue aún siendo un problema sin resolver.

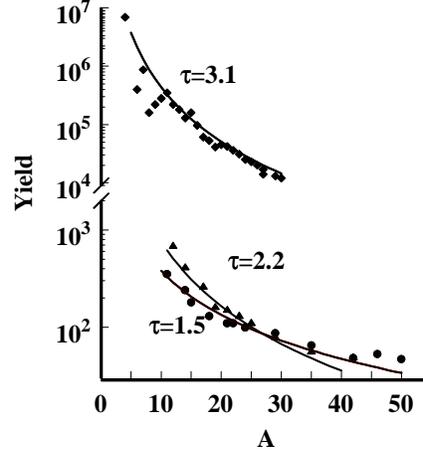


FIG. 11: Distribución de masa emitida en reacciones de proton en Kriptón a  $80 - 350 \text{ GeV}$  (top) y Neón en Oro a  $250$  y  $2100 \text{ MeV/N}$ .

#### D Curva calórica

Otra posibilidad para identificar una transición de fase viene de la curva calórica de la materia nuclear. Como se explicó en la sección II C 1, la energía que se agrega en una transición de fase se usa para romper uniones entre partículas y produce, no un incremento en la temperatura, sino una temperatura constante. El obtener la curva calórica de un núcleo en rompimiento requiere, sin embargo la extracción simultánea de la temperatura lograda en la reacción y la energía de excitación depositada durante el choque.

Como se mencionó en las observaciones en la sección V A, la temperatura lograda en una reacción nuclear evoluciona en tiempo. Para extraer la curva calórica, se necesita usar la temperatura que tuvo el sistema mientras la supuesta transición de fase tuvo lugar. Experimentalmente, sin embargo, esto es muy difícil de lograr pues son los productos finales los únicos que se detectan. Pochodzalla y colegas [31] entre otros [32–34] han usado datos experimentales para construir tal curva calórica.

La figura 13 muestra la llamada temperatura isotópica en función de la energía de excitación por nucleón obtenida de las reacciones  $Au + Au$  a  $600 \text{ MeV/N}$ ,  $C, O + Ag, Au$  a  $30$  y  $84 \text{ MeV/N}$ , y  $Ne + Ta$  a  $8.1 \text{ MeV/N}$  [31]. La parte de temperatura constante que señalaría una transición de fase de primer orden está claramente visible en  $T \approx 5 \text{ MeV}$  para  $3 \leq E^* \leq 9 \text{ MeV}$ . También se muestran las curvas esperadas para un sistema de Fermi,  $E^* = aT^2$  (con el parámetro de densidad de niveles ajustado a  $a = 1/12 \text{ MeV}^{-1}$ ), y la expresión clásica  $E^* = E_o + 3T/2$ , con un corrimiento de  $E_o = 1.5 \text{ MeV}$ .

Para construir esta curva calórica, se usaron varias suposiciones, incluyendo incertidumbres en la evaluación de la energía de excitación, correcciones de Coulomb, y temperaturas isotópicas [35, 36] entre otras. Esto, en parte, podría explicar el porque los valores de  $T$  observados en la figura 13 son menores que los extraídos de las distribuciones de energía cinética, como en la figura 10.

[Otro análisis de los mismos datos, pero usando solo los isótopos de  $Li^5$  producen la misma curva sin la parte “clásica” [37]. Esto está de acuerdo con la fragmentación de gotas de partículas de Lennard-Jones drops [38].]

Con todas estas reservas, la aparente transición de un líquido de Fermi a bajas temperaturas a un sistema clásico a altas energías, mediado por una región de  $T$  constante parece indicar que una transición de fase es en realidad posible en una reacción nuclear.

#### **Problem 5.3. Densidad nuclear durante el rompimiento**

Identifique la curva  $E^* = aT^2$  de la figura 13 con  $E_T(T)/N$  de la sección II A 1, y use el valor  $a = 1/12 \text{ MeV}^{-1}$  y  $\epsilon_F$  del problema 2.4 para obtener la densidad del sistema durante rompimientos a energías en el rango de  $0 \leq E^* \leq 3 \text{ MeV}$  donde la curva de Fermi parece ser válida.

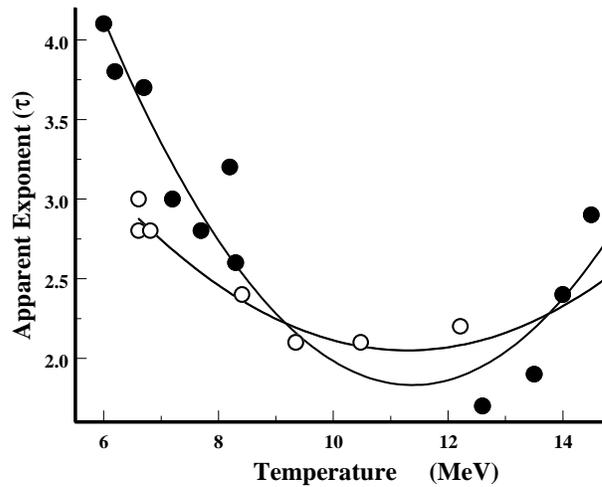


FIG. 12: Valores del exponente aparente  $\tau$  obtenido de varios experimentos.

### E Conclusiones

Este capítulo representa un mínimo esfuerzo de corroborar la existencia de fases en la materia nuclear usando datos experimentales. Para examinar tal posibilidad, un escenario general fue adoptado en el cual un choque entre iones pesados forma un sistema comprimido y caliente que se expande hacia la región de coexistencia o hasta las regiones espinodales rompiéndose en fragmentos y partículas ligeras. Varias consideraciones relacionadas con escalas de tamaños, energías, y tiempo fueron discutidas, así como el papel del parámetro de impacto, efectos cuánticos, y la ausencia de termómetros nucleares confiables.

Con esto en mente, las partículas emitidas en una reacción experimental, pueden ser atribuidas a una evaporación de una fuente termalizada. Esto fue corroborado presentando la distribución de energía cinética de las partículas emitidas, la cual se ajusta bien a una distribución de Maxwell. Las temperaturas así observadas están en la región de  $T \approx 12 - 15 \text{ MeVs}$ .

Después, las distribuciones de masa fueron comparadas con las esperadas por el proceso de nucleación. Datos experimentales obtenidos de la fragmentación de kriptón por protones, dan los ajustes esperados de ley de potencia, con la dependencia en la temperatura correcta de los exponentes obtenidos.

Finalmente, una cuidadosa extracción de la energía de excitación y la temperatura lograda en reacciones de fragmentación, permiten el cálculo de la curva calórica de la materia nuclear. Estos resultados parecen indicar que para un gran rango de energías la temperatura no aumenta, característica de los cambios de fase.

En resumen, datos experimentales parecen apoyar la existencia de un cambio de fase de líquido a gas en reacciones nucleares. La termalización parece ser lograda durante la reacción. La nucleación parece tener tiempo suficiente para producir la distribución de masas esperadas. Y las curvas calóricas preliminares parecen indicar la existencia de un cambio de fase líquido a gas de primer orden. El hecho de que un efecto macroscópico, como un cambio de fase, se presente en un sistema microscópico, como el núcleo, es una ilustración del principio "*ad augusta per angusta*".

### REFERENCES

- [1] López J. A. y Dorso C. O., (2000) *Phase Transitions in Nuclear Matter*, World Scientific, Singapore.
- [2] Segrè E., (1982) *Nuclei and Particles*, 2nd Ed., Addison Wesley, Massachusetts.
- [3] McQuarrie D., (1973) *Statistical Mechanics*, Harper and Row, New York.
- [4] Friedman W. A. and Lynch W. G., (1983) *Phys. Rev.* **C28**, 28.
- [5] López J. A. and Randrup J., (1994) *Nuc. Phys.* **A571**, 379;  
López J. A. (1996) *Heavy ion Phys.* **3**, 141.

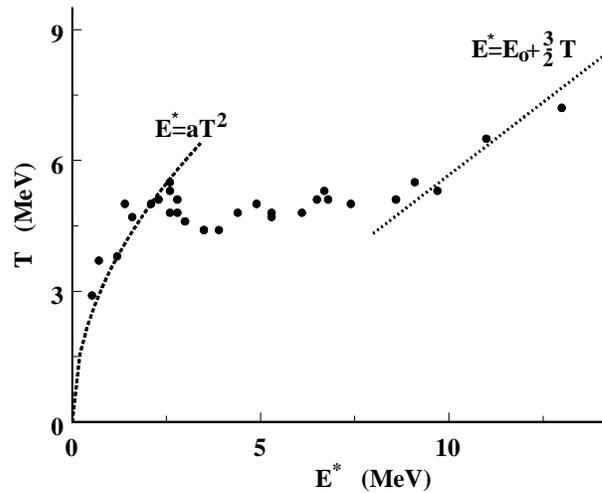


FIG. 13: Determinación experimental de la curva calórica nuclear

- [6] Youngblood D. H., Rozsa C. M., Moss J. M., Brown D. R., and Bronson J. D., (1977) *Phys. Rev.* **39**, 1188.
- [7] Danielewicz P., (1973) *Nuclear Physics* **A314**, 465.
- [8] Bertsch G. F. and Siemens P., (1984) *Nuc. Phys.* **A314**, 465.
- [9] López J. and Siemens P., (1984) *Nuc. Phys.* **A314**, 465.
- [10] Kapusta J., (1984) *Phys. Rev.* **C29**, 1735.
- [11] Goodman A. L., Kapusta J. I. and Mekjian A. Z., (1984) *Phys. Rev.* **C30**, 851.
- [12] Landau L. D. and Lifshitz E. M., (1980) *Statistical Physics, 3rd Ed., Part 1*, Pergamon Press Ltd, New York.
- [13] Domb C. and Green M. S. Eds., (1980) *Phase Transitions & Critical Phenomena, Vol. 2*, Pergamon Press Ltd., New York.
- [14] Pethick C. J. and Ravenhall D. G., (1987) *Nucl. Phys.* **A471**, 19;  
Pethick C. J. and Ravenhall D. G. (1986) in *Hadrons in Collision* Ed. Carruthers P. and Strottman D., World Scientific, Singapore, 277;  
H. Heiselberg, Pethick C. J. and Ravenhall D. G. (1988) *Phys. Rev. Lett.* **61**, 818.
- [15] Baumgardt H. G. *et al.*, (1975) *Z. Phys.* **A273**, 359.
- [16] Jakobsson B. *et al.*, (1977) *Nucl. Phys.* **A276**, 523.
- [17] Finn J. E. *et al.*, (1982) *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1321.
- [18] Panagiotou A. D. *et al.*, (1984) *Phys. Rev. Lett.* **52**, 496.
- [19] Walecka J. D., (1995) *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*, Oxford University Press, New York.
- [20] Durand L., (1998) *Selected Aspects of the Physics of Hot Nuclei, Preprint LPC Caen LPCC 98-02*.
- [21] Porile N. T. *et al.*, (1989) *Phys. Rev.* **C39**, 1914.
- [22] Borderie B. *et al.*, (1990) *Eur. Phys. J.* **A6**, 197.
- [23] Warwick *et al.*, (1983) *Phys. Rev.* **C27**, 1083.
- [24] Ogilvie C. A. *et al.*, (1991) *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1214.
- [25] Mastinu P. F. *et al.*, (1996) *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2646; Mastinu P. F. *et al.* (1998) *Phys. Rev.* **C57**, 831.
- [26] D'agostino M. *et al.*, (1995) *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4373.
- [27] Gilkes M. L. *et al.*, (1994) *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1590.
- [28] Trockel R. *et al.*, (1989) *Phys. Rev.* **C39**, 729.
- [29] Bravina L. V. and Zabrodin E. E., (1996) *Phys. Rev.* **C54**, R464.
- [30] Li T. *et al.*, (1994) *Phys. Rev.* **C49**, 1630.
- [31] Pochodzalla J. *et al.*, (1995) *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1040.
- [32] Fabris D. *et al.*, (1987) *Phys. Lett.* **B196**, 429.
- [33] Kwiatkowski K. *et al.*, (1998) *Phys. Lett.* **B423**, 21.
- [34] Samaddar S. K., De J. N. and Shlomo S., (1997) *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4962.
- [35] Albergo S. *et al.*, (1985) *Il Nuovo Cimento* **A89**, 1.

- [36] Tsang M. B., Lynch W. G., Xi H. and Friedman W. A., (1997) *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3836.
- [37] Serfling V. *et al.*, (1998) *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3928.
- [38] Strachan A. and Dorso C. O., (1997) *Phys. Rev.* **C55**, 775.